Projet MasterMind

Je m'intéresse à l'algorithme de $(1+1)$-EA sur le jeu MasterMind avec n cases. Cet algorithme prend en paramètre une probabilité p. Notons l'algorithme, par soucis de simplification des notations, $\mathcal{T}_n(p)$.

Je souhaite déterminer la valeur du paramètre p qui donne, en moyenne, le meilleur résultat, *c'est-à-dire* la valeur p qui minimise $\mathbb{E}(\mathcal{T}_n(p))$. Pour cela, j'applique l'algorithme une fois pour chaque valeur d'un ensemble E de paramètres.

Prenons un p. Posons la variable aléatoire suivante :

$$X^{(p)} = \begin{cases} 1 \; p \text{ est le paramètre qui aura minimisé l'algorithme,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$X^{(p)}$ suit une loi de Bernoulli de moyenne μ_p, *ie* $X^{(p)} \sim \text{Bern}(\mu_p)$.

Je recherche le meilleur paramètre p. Autrement dit, je cherche la valeur p qui minimise μ_p. Pour cela, je vais effectuer m fois l'expérience précédente, de manière indépendante. On obtient donc les variables aléatoires suivantes :

$$X_i^{(p)} = \begin{cases} 1 \; p \text{ est le paramètre qui aura minimisé l'algorithme durant l'expérience } i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Fixons la valeur p. $X_1^{(p)}, X_2^{(p)}, ...$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Leur moyenne est μ_p et leur écart-type est $\sigma_p = \sqrt{\mu_p(1-\mu_p)}$. Notons $S_p = X_1^{(p)} + X_2^{(p)} + ... + X_m^{(p)}$. D'après le théorème central limite, on a, avec une probabilité de 95%,

$$-2 \leq \frac{S_p - m\mu_p}{\sigma_p\sqrt{m}} \leq 2$$

On en déduit donc que $(S_p - m\mu_p)^2 \leq 4m\sigma_p^2 = 4m\mu_p(1-\mu_p)$. Donc,

$$\mu_p^2(m^2 + 4m) + \mu_p(-2mS_p - 4m) + S_p^2 \leq 0$$

En divisant par m^2 et en notant $s_p := \frac{S_p}{m}$, on obtient

$$\mu_p^2(1 + \frac{4}{m}) + \mu_p(-2s_p - \frac{4}{m}) + s_p^2 \leq 0$$

Par résolution de polynôme du second degré, avec le discriminant $\frac{16}{m}(s_p - s_p^2 + \frac{1}{m})$, on a

$$\frac{2s_p + \frac{4}{m} - \sqrt{\frac{16}{m}(s_p - s_p^2 + \frac{1}{m})}}{2(1 + \frac{4}{m})} \leq \mu_p \leq \frac{2s_p + \frac{4}{m} + \sqrt{\frac{16}{m}(s_p - s_p^2 + \frac{1}{m})}}{2(1 + \frac{4}{m})}$$

Avec simplification,

$$\frac{s_p + \frac{2}{m} - \sqrt{\frac{4}{m}(s_p - s_p^2 + \frac{1}{m})}}{1 + \frac{4}{m}} \leq \mu_p \leq \frac{s_p + \frac{2}{m} + \sqrt{\frac{4}{m}(s_p - s_p^2 + \frac{1}{m})}}{1 + \frac{4}{m}}$$

...et cela avec une probabilité de 95%. Il est possible d'étendre le résultat en montrant que μ_p a une probabilité de 2.5% d'être inférieur à la borne de gauche, et symétriquement pour la borne de droite.

Notons p_{best} la valeur du paramètre maximisant s_p (c'est une variable aléatoire), et notons p_{opt} la valeur du paramètre maximisant μ_p (c'est une constante du problème, on recherche justement p_{opt}). Notons $\alpha(s_p)$ le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus, et $\beta(s_p)$ le terme de droite.

Calculons $\mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}})]$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}})] \\
&\qquad = \mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}}), \mu_{p_{\text{opt}}} \geq \beta(s_{p_{\text{opt}}})] \times \mathbb{P}[\mu_{p_{\text{opt}}} \geq \beta(s_{p_{\text{opt}}})] \\
&\qquad\quad + \mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}}), \mu_{p_{\text{opt}}} < \beta(s_{p_{\text{opt}}})] \times \mathbb{P}[\mu_{p_{\text{opt}}} < \beta(s_{p_{\text{opt}}})] \\
&\qquad \leq 1 \times 0.025 + \mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}}), \mu_{p_{\text{opt}}} < \beta(s_{p_{\text{opt}}})] \times 1 \\
&\qquad = 0.025 + \mathbb{P}[\mu_{p_{\text{opt}}} < \beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}})]
\end{aligned}$$

Or, par définition de p_{opt}, on a $\mu_{p_{\text{opt}}} \geq \mu_{p_{\text{best}}}$. Donc,

$$\{\mu_{p_{\text{opt}}} < \beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}})\} \subset \{\mu_{p_{\text{opt}}} < \alpha(s_{p_{\text{best}}})\} \subset \{\mu_{p_{\text{best}}} < \alpha(s_{p_{\text{best}}})\}$$

Donc,

$$\mathbb{P}[\beta(s_{p_{\text{opt}}}) < \alpha(s_{p_{\text{best}}})] \leq 0.025 + \mathbb{P}[\mu_{p_{\text{best}}} < \alpha(s_{p_{\text{best}}})] \leq 0.05$$

Par conséquent, avec une probabilité d'au moins 95%, $p_{\text{opt}} \in [p_{\min}, p_{\max}]$ où $p_{\min}$ (resp. $p_{\max}$) est la valeur minimale (resp. maximale) de p vérifiant $\beta(s_p) \geq \alpha(s_{p_{\text{best}}})$.

Ainsi, en réalisant m fois l'expérience, il est possible de sortir un intervalle de confiance à 95% pour la valeur du paramètre optimale.

Application : $E = \{0.010, 0.015, 0.020, ..., 0.50\}$
— $n = 3$: $p_{\text{opt}} \in [0.31, 0.48]$, $p_{\text{best}} = 0.48$
— $n = 4$: $p_{\text{opt}} \in [0.36, 0.36]$, $p_{\text{best}} = 0.36$

- $n = 5 : p_{\text{opt}} \in [0.18, 0.28]$, $p_{\text{best}} = 0.28$
- $n = 6 : p_{\text{opt}} \in [0.16, 0.29]$, $p_{\text{best}} = 0.16$
- $n = 7 : p_{\text{opt}} \in [0.15, 0.15]$, $p_{\text{best}} = 0.15$
- $n = 8 : p_{\text{opt}} \in [0.15, 0.2]$, $p_{\text{best}} = 0.15$
- $n = 9 : p_{\text{opt}} \in [0.14, 0.14]$, $p_{\text{best}} = 0.14$
- $n = 10 : p_{\text{opt}} \in [0.1, 0.13]$, $p_{\text{best}} = 0.1$
- $n = 11 : p_{\text{opt}} \in [0.09, 0.14]$, $p_{\text{best}} = 0.13$